

UENDELIGHEDSBEGREBET

- MATEMATISK SET

Hvor stort kan et tal være?

Er $\infty + 1$ større end ∞ ? Hvad giver $\infty - \infty$?

Universets opståen ... hvad var der før?

Kan man gå uendeligt langt tilbage i tid? Og frem?

Hvad er dog uendelighed?



M. C. Escher, billedkunstner (1898-1972)

*Denne folder er udarbejdet af 3.t fra Ribe Katedralskole og lektor Camilla Darling Bunk.
3.t har matematik på A-niveau.*

TAL

Googolplex er et af de største tal, vi har et navn for. Det består af et 1-tal fulgt af googol nuller (10^{100}). Men det er ikke det største tal!



Grahams tal er det største tal, som nogensinde er anvendt seriøst i et matematisk bevis. Der er flere cifre i Grahams tal end der er neutroner i den kendte del af universet.



π har uendeligt mange decimaler. Her er der 100 decimaler:

3,1415926535 8979323846 2643383279
5028841971 6939937510 5820974944
5923078164 0628620899 8628034825
3421170679

Der er uendeligt mange tal på tallinjen mellem 0 og 1

Vælg for eksempel $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7} \dots$ osv.

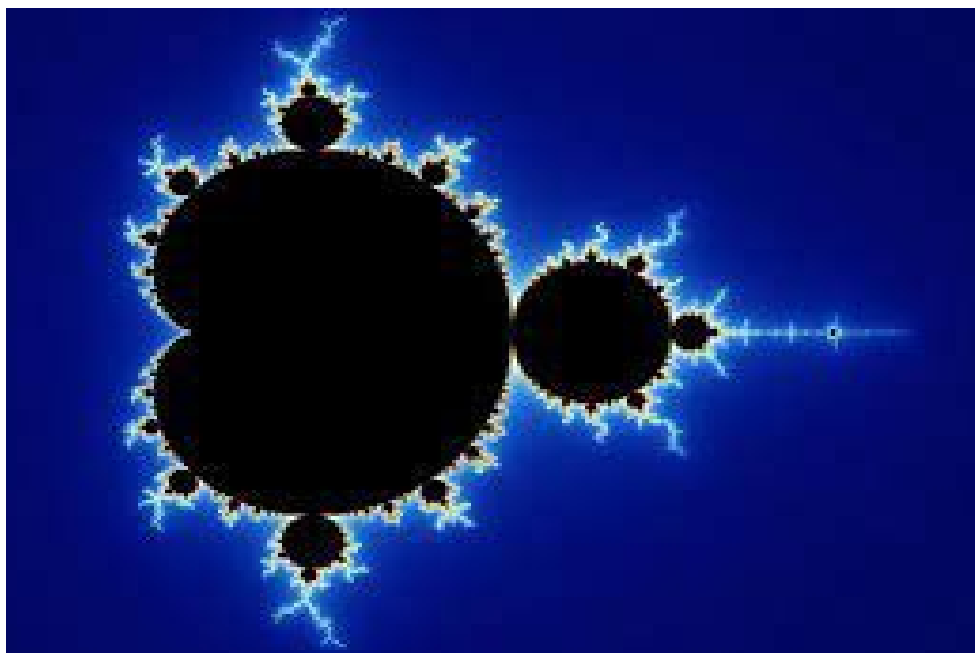
Tallene kommer tættere og tættere på 0, men "rammer" aldrig.

Men så må der være en større uendelig mængde af tal mellem 0 og 2?

Nej! Uendeligheder er drilske og man skal passe på med at stole på sin intuition. Der er ikke flere tal mellem 0 og 1 end mellem 0 og 2, hvor paradoksalt det end lyder!

Fraktaler

Fraktaler illustrerer tallenes uendelighed på makroplan og mikroplan.



En *fraktal* er populært sagt en særlig type geometrisk struktur, der gentager sig selv i det uendelige, når man "zoomer ind" på et område.

ACHILLEUS OG SKILDPADDEN

Et klassiske paradoks

Helten Achilleus skal løbe om kap med en skildpadde. Da Achilleus er antikkens hurtigste løber, får skildpadden et forspring. Hvad sker der? Zenon (græsk filosof 490-425 f.v.t.) påstår, at Achilleus aldrig vil indhente skildpadden fordi:

Når Achilleus når derhen, hvor skildpadden startede, har skildpadden i mellemtiden bevæget sig et stykke længere fremad (om end det er et kort stykke). Og når Achilleus når derhen, hvor skildpadden i første omgang løb til, så har skildpadden igen bevæget sig et lille stykke fremad. Sådan fortsætter kapløbet og på denne måde kommer vi ind i en uendelig proces, hvor Achilleus kommer tættere og tættere på skildpadden, men aldrig indhenter den.



Zenons paradoks strider mod vore erfaringer - vi ved jo, at Achilleus vinder - så hvad går galt i argumentationen?

Matematisk forklaring af Zenons paradoks

Antag, at Achilles løber bare dobbelt så hurtigt som skildpadden. Så vil afstanden mellem Achilles og skildpadden ved første måling være $\frac{1}{2}$, ved den næste måling $\frac{1}{4}$, så $\frac{1}{8}$ osv.

Afstanden mellem Achilles og skildpadden kan beskrives ved summen:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Dette kaldes i matematikken for en *uendelig række*, fordi den har uendeligt mange led.

Denne række består altså af summen af kvotienter $\frac{1}{2^n}$, hvor n løber fra 1 til ∞ . I matematikken noteres dette med et sumtegn således:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Man kan bevise matematisk - men af pladsmangel gør vi det ikke her!* - at denne række har en *endelig sum*, nemlig 1. Man siger, at rækken er *konvergent*.

Altså:

I matematik kan en sum af uendeligt mange størrelser godt tillægges en endelig værdi (altså et tal).

Det beskrevne kapløb varer kun den tid, det tager for Achilles at løbe det dobbelte af skildpaddens forspring. Med mere tid til rådighed vil Achilles altså overhale skildpadden.

Uendelighedens cirkel er brudt!

* Beviset kan ses i denne video fra DTU: <https://www.youtube.com/watch?v=jXjqMZymh4s&t=1025s>

GRUK

***Det tegn som betegner
uendelighed
skal være et ottetal
liggende ned.
Måske er et ottetal
tværti-netop
et uendelighedstegn
som har rejst sig op!***

Kumbel Kumbell (10. saml., Politikens Forlag 1949)

HVAD SER DU HER?



Se næste side!

Det uendelige!

Det uforklarlige, usynlige og utænkelige er uendeligt.

Den sorte prik symboliserer dét, vi lægger mærke til og forstår - du lagde sikkert mærke til prikken og ikke alt det hvide, tomme og uforklarlige uden om...!

